PROMETHEE-compatible presentations of multicriteria evaluation tables

Karim Lidouh, Anh Vu Doan*, Yves De Smet

CoDE-SMG, Université libre de Bruxelles

2nd International MCDA Workshop on PROMETHEE: Research and Case Studies

Is it better to order a table like this...?

Best cities ranking subset - Evaluation table

Perm		1	2	3	4	5	6
	City	Stability	Healthcare	Culture and Environment	Education	Infrastructure	Spatial Characteristics
1	Hong Kong	95	87.5	85.9	100	96.4	75
2	Stockholm	95	95.8	91.2	100	96.4	58.9
3	Rome	80	87.5	91.7	100	92.9	67.3
4	New York	70	91.7	91.7	100	89.3	65.2
5	Atlanta	85	91.7	91.7	100	92.9	42.9
6	Buenos Aires	70	87.5	85.9	100	85.7	42.3
7	Santiago	75	70.8	89.1	83.3	85.7	35.1
8	Sao Paulo	60	70.8	80.3	66.7	66.1	52.4
9	Mexico City	45	66.7	82.4	75	46.4	65.8
10	New Delhi	55	58.3	55.6	75	58.9	58.6
11	Istanbul	55	50	68.8	58.3	67.9	47.5
12	Jakarta	50	45.8	59.3	66.7	57.1	42.3
13	Tehran	50	62.5	35.9	50	33.9	53.6
14	Dakar	50	41.7	59.7	50	37.5	22.6

... or like this...?

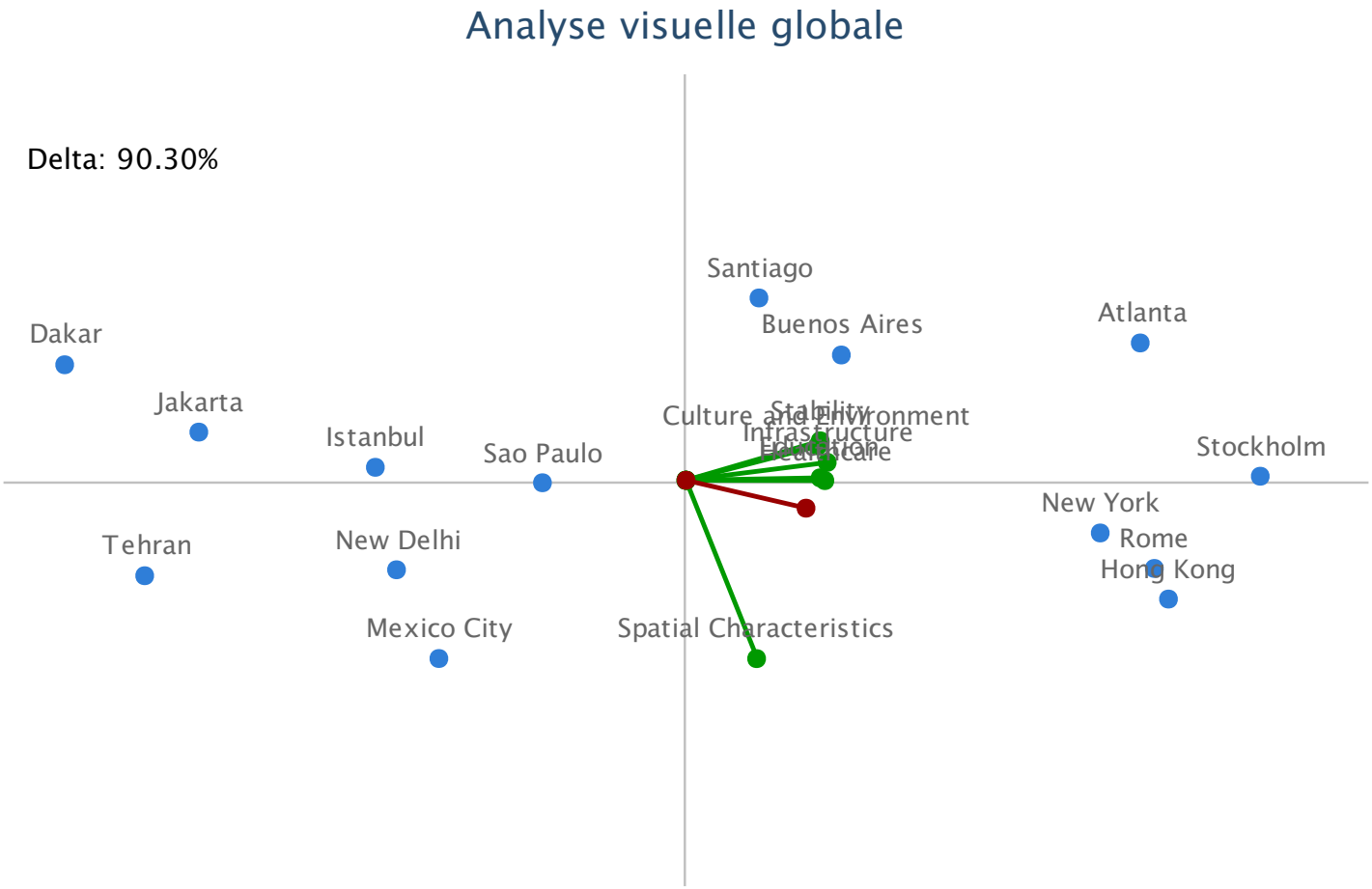
Best cities ranking subset - Evaluation table

Perm		5	4	1	3	2	6
	City	Infrastructure	Education	Stability	Culture and Environment	Healthcare	Spatial Characteristics
5	Atlanta	92.9	100	85	91.7	91.7	42.9
6	Buenos Aires	85.7	100	70	85.9	87.5	42.3
14	Dakar	37.5	50	50	59.7	41.7	22.6
1	Hong Kong	96.4	100	95	85.9	87.5	75
11	Istanbul	67.9	58.3	55	68.8	50	47.5
12	Jakarta	57.1	66.7	50	59.3	45.8	42.3
9	Mexico City	46.4	75	45	82.4	66.7	65.8
10	New Delhi	58.9	75	55	55.6	58.3	58.6
4	New York	89.3	100	70	91.7	91.7	65.2
3	Rome	92.9	100	80	91.7	87.5	67.3
7	Santiago	85.7	83.3	75	89.1	70.8	35.1
8	Sao Paulo	66.1	66.7	60	80.3	70.8	52.4
2	Stockholm	96.4	100	95	91.2	95.8	58.9
13	Tehran	33.9	50	50	35.9	62.5	53.6

... or with some colors and "smart" reordering?

	Crit4	Crit5	Crit3	Crit1	Crit6	Crit2	NetFlows
A2	100	96,4	91,2	95	58,9	95,8	0,704808
A1	100	96,4	85,9	95	75	87,5	0,694231
A3	100	92,9	91,7	80	67,3	87,5	0,667308
A4	100	89,3	91,7	70	65,2	91,7	0,541346
A5	100	92,9	91,7	85	42,9	91,7	0,446154
A6	100	85,7	85,9	70	42,3	87,5	0,030769
A7	83,3	85,7	89,1	75	35,1	70,8	-0,03846
A8	66,7	66,1	80,3	60	52,4	70,8	-0,14615
A9	75	46,4	82,4	45	65,8	66,7	-0,17885
A10	75	58,9	55,6	55	58,6	58,3	-0,30865
A11	58,3	67,9	68,8	55	47,5	50	-0,35481
A13	50	33,9	35,9	50	53,6	62,5	-0,575
A12	66,7	57,1	59,3	50	42,3	45,8	-0,65577
A14	50	37,5	59,7	50	22,6	41,7	-0,82692

We can use PROMETHEE-GAIA to enrich evaluation tables with multicriteria information



GAIA plane for the best cities subset

We can order alternatives and criteria on basis of netflows, weights, angle and proximity found in GAIA

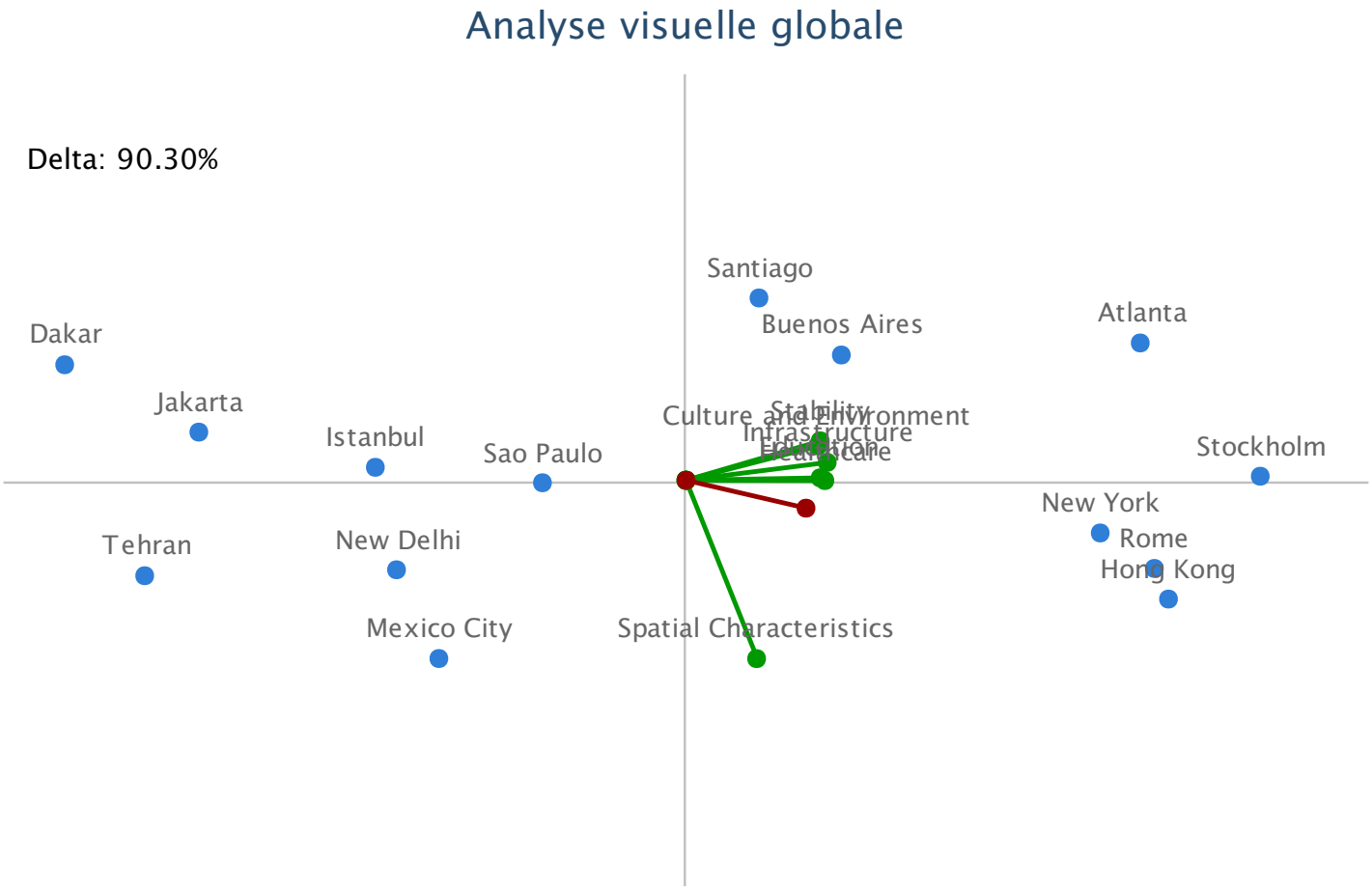
Possibilities for the alternatives:

- Netflow
- Angle
- Proximity

Possibilities for the criteria:

- Weights
- Angle
- Proximity

We can use PROMETHEE-GAIA to enrich evaluation tables with multicriteria information



GAIA plane for the best cities subset

4 combinations of orders are actually interesting

Combinations of orders and chosen representations

		Order of criteria		
		Weights	Angle	Proximity
Order of alternatives	Netflows	◯	◯	×
	Angle	×	◯	×
	Proximity	×	×	◯

The Netflow-Angle view can group all the good and bad alternatives

	Crit4	Crit5	Crit3	Crit1	Crit6	Crit2	NetFlows
A2	100	96,4	91,2	95	58,9	95,8	0,704808
A1	100	96,4	85,9	95	75	87,5	0,694231
A3	100	92,9	91,7	80	67,3	87,5	0,667308
A4	100	89,3	91,7	70	65,2	91,7	0,541346
A5	100	92,9	91,7	85	42,9	91,7	0,446154
A6	100	85,7	85,9	70	42,3	87,5	0,030769
A7	83,3	85,7	89,1	75	35,1	70,8	-0,03846
A8	66,7	66,1	80,3	60	52,4	70,8	-0,14615
A9	75	46,4	82,4	45	65,8	66,7	-0,17885
A10	75	58,9	55,6	55	58,6	58,3	-0,30865
A11	58,3	67,9	68,8	55	47,5	50	-0,35481
A13	50	33,9	35,9	50	53,6	62,5	-0,575
A12	66,7	57,1	59,3	50	42,3	45,8	-0,65577
A14	50	37,5	59,7	50	22,6	41,7	-0,82692

Best cities subset - Netflow-Angle

The Netflow-Weight view can highlight characteristics that may have greater impact on the decision

	Crit6	Crit1	Crit3	Crit2	Crit5	Crit4	NetFlows
A2	58,9	95	91,2	95,8	96,4	100	0,704808
A1	75	95	85,9	87,5	96,4	100	0,694231
A3	67,3	80	91,7	87,5	92,9	100	0,667308
A4	65,2	70	91,7	91,7	89,3	100	0,541346
A5	42,9	85	91,7	91,7	92,9	100	0,446154
A6	42,3	70	85,9	87,5	85,7	100	0,030769
A7	35,1	75	89,1	70,8	85,7	83,3	-0,03846
A8	52,4	60	80,3	70,8	66,1	66,7	-0,14615
A9	65,8	45	82,4	66,7	46,4	75	-0,17885
A10	58,6	55	55,6	58,3	58,9	75	-0,30865
A11	47,5	55	68,8	50	67,9	58,3	-0,35481
A13	53,6	50	35,9	62,5	33,9	50	-0,575
A12	42,3	50	59,3	45,8	57,1	66,7	-0,65577
A14	22,6	50	59,7	41,7	37,5	50	-0,82692

Best cities subset - Netflow-Weight

The Angle-Angle view can show profiles, from the best to the worst to the best

	Crit4	Crit5	Crit3	Crit1	Crit6	Crit2	NetFlows
A2	100	96,4	91,2	95	58,9	95,8	0,704808
A5	100	92,9	91,7	85	42,9	91,7	0,446154
A6	100	85,7	85,9	70	42,3	87,5	0,030769
A7	83,3	85,7	89,1	75	35,1	70,8	-0,03846
A14	50	37,5	59,7	50	22,6	41,7	-0,82692
A12	66,7	57,1	59,3	50	42,3	45,8	-0,65577
A11	58,3	67,9	68,8	55	47,5	50	-0,35481
A8	66,7	66,1	80,3	60	52,4	70,8	-0,14615
A13	50	33,9	35,9	50	53,6	62,5	-0,575
A10	75	58,9	55,6	55	58,6	58,3	-0,30865
A9	75	46,4	82,4	45	65,8	66,7	-0,17885
A1	100	96,4	85,9	95	75	87,5	0,694231
A3	100	92,9	91,7	80	67,3	87,5	0,667308
A4	100	89,3	91,7	70	65,2	91,7	0,541346

Best cities subset - Angle-Angle

The Proximity-Proximity view can group the highest values

	Crit2	Crit4	Crit5	Crit3	Crit1	Crit6	NetFlows
A4	91,7	100	89,3	91,7	70	65,2	0,541346
A3	87,5	100	92,9	91,7	80	67,3	0,667308
A1	87,5	100	96,4	85,9	95	75	0,694231
A2	95,8	100	96,4	91,2	95	58,9	0,704808
A5	91,7	100	92,9	91,7	85	42,9	0,446154
A6	87,5	100	85,7	85,9	70	42,3	0,030769
A7	70,8	83,3	85,7	89,1	75	35,1	-0,03846
A9	66,7	75	46,4	82,4	45	65,8	-0,17885
A10	58,3	75	58,9	55,6	55	58,6	-0,30865
A13	62,5	50	33,9	35,9	50	53,6	-0,575
A8	70,8	66,7	66,1	80,3	60	52,4	-0,14615
A11	50	58,3	67,9	68,8	55	47,5	-0,35481
A12	45,8	66,7	57,1	59,3	50	42,3	-0,65577
A14	41,7	50	37,5	59,7	50	22,6	-0,82692

Best cities subset - Proximity-Proximity

How to evaluate different representations? Developing an optimization indicator: the ∇-indicator

∇ is the number of "ordered" pairs for each row and column:

$$\nabla = \sum_{i=1}^{n} \nabla_{i\cdot} + \sum_{j=1}^{m} \nabla_{\cdot j}$$

where

- $\nabla_{i\cdot}$ is the ∇ value of the i-th row:

$$\nabla_{i\cdot} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=k+1}^{m} \mathbb{1}_{k<l} \mathbb{1}_{f_k(a_i) \geq f_l(a_i)}$$

- $\nabla_{\cdot j}$ is the ∇ value of the j-th column:

$$\nabla_{\cdot j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=k+1}^{n} \mathbb{1}_{k<l} \mathbb{1}_{f_j(a_k) \geq f_j(a_l)}$$

How to evaluate different representations? Developing an optimization indicator: the ∇-indicator

∇ is the number of "ordered" pairs for each row and column

Best cities ranking subset - Evaluation table - ∇-indicator computation

City	Stability	Healthcare	Culture and Environment	Education	Infrastructure	Spatial Characteristics	$\nabla_{i.}$
Hong Kong	95	87.5	85.9	100	96.4	75	9
Stockholm	95	95.8	91.2	100	96.4	58.9	8
Rome	80	87.5	91.7	100	92.9	67.3	6
New York	70	91.7	91.7	100	89.3	65.2	9
Atlanta	85	91.7	91.7	100	92.9	42.9	7
Buenos Aires	70	87.5	85.9	100	85.7	42.3	9
Santiago	75	70.8	89.1	83.3	85.7	35.1	8
Sao Paulo	60	70.8	80.3	66.7	66.1	52.4	10
Mexico City	45	66.7	82.4	75	46.4	65.8	7
New Delhi	55	58.3	55.6	75	58.9	58.6	4
Istanbul	55	50	68.8	58.3	67.9	47.5	8
Jakarta	50	45.8	59.3	66.7	57.1	42.3	8
Tehran	50	62.5	35.9	50	33.9	53.6	9
Dakar	50	41.7	59.7	50	37.5	22.6	12
$\nabla_{.j}$	82	83	76	88	84	66	$\nabla = 593$

Best tables found with a classical genetic algorithm

	Crit4	Crit3	Crit5	Crit2	Crit1	Crit6	Netflows
A2	100	91,2	96,4	95,8	95	58,9	0,704808
A1	100	85,9	96,4	87,5	95	75	0,694231
A5	100	91,7	92,9	91,7	85	42,9	0,446154
A3	100	91,7	92,9	87,5	80	67,3	0,667308
A4	100	91,7	89,3	91,7	70	65,2	0,541346
A6	100	85,9	85,7	87,5	70	42,3	0,030769
A7	83,3	89,1	85,7	70,8	75	35,1	-0,03846
A8	66,7	80,3	66,1	70,8	60	52,4	-0,14615
A9	75	82,4	46,4	66,7	45	65,8	-0,17885
A10	75	55,6	58,9	58,3	55	58,6	-0,30865
A11	58,3	68,8	67,9	50	55	47,5	-0,35481
A12	66,7	59,3	57,1	45,8	50	42,3	-0,65577
A13	50	35,9	33,9	62,5	50	53,6	-0,575
A14	50	59,7	37,5	41,7	50	22,6	-0,82692

(a) Best found table

	Crit4	Crit5	Crit3	Crit1	Crit6	Crit2	NetFlows
A2	100	96,4	91,2	95	58,9	95,8	0,704808
A1	100	96,4	85,9	95	75	87,5	0,694231
A3	100	92,9	91,7	80	67,3	87,5	0,667308
A4	100	89,3	91,7	70	65,2	91,7	0,541346
A5	100	92,9	91,7	85	42,9	91,7	0,446154
A6	100	85,7	85,9	70	42,3	87,5	0,030769
A7	83,3	85,7	89,1	75	35,1	70,8	-0,03846
A8	66,7	66,1	80,3	60	52,4	70,8	-0,14615
A9	75	46,4	82,4	45	65,8	66,7	-0,17885
A10	75	58,9	55,6	55	58,6	58,3	-0,30865
A11	58,3	67,9	68,8	55	47,5	50	-0,35481
A13	50	33,9	35,9	50	53,6	62,5	-0,575
A12	66,7	57,1	59,3	50	42,3	45,8	-0,65577
A14	50	37,5	59,7	50	22,6	41,7	-0,82692

(b) Netflow-Angle

Best cities subset

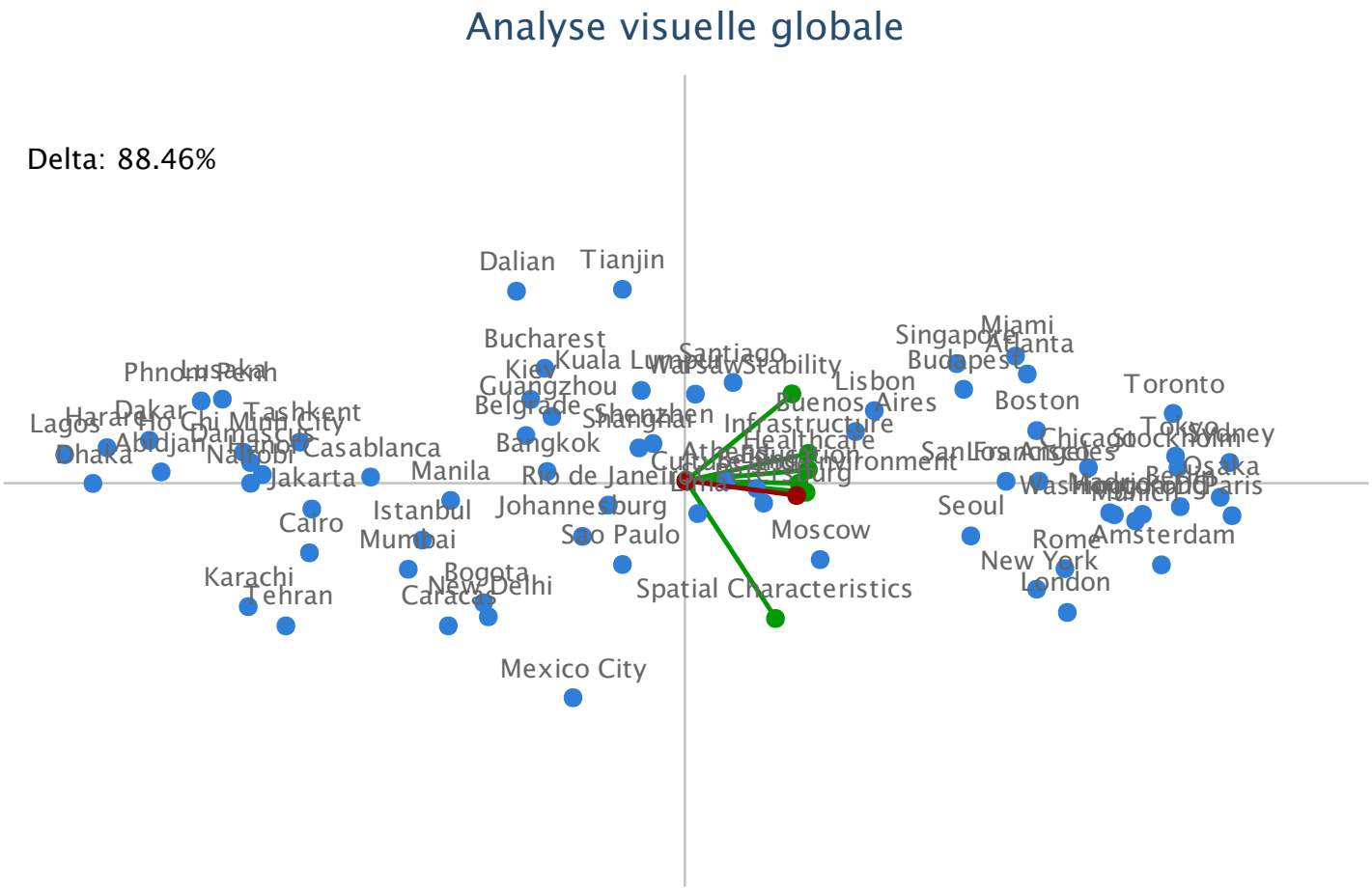
How to compare the representations? Defining a ratio R based on the ∇-indicator

Defined to keep the comparisons as objective as possible, independently of the table size

$$R = \frac{\nabla - \nabla_{\text{worst}}}{\nabla_{\text{best}} - \nabla_{\text{worst}}}$$

where ∇_{best} is the best ∇ found with our genetic algorithm and ∇_{worst} is the value associated to the worst feasible table

Case study 1: best cities ranking



GAIA plane for the best cities ranking

Best cities ranking representations

	Crit2	Crit5	Crit1	Crit6	Crit3	Crit4	NetFlows
A4	100	96,4	85	63,7	97,2	100	0,804167
A3	100	96,4	90	64	93,5	100	0,795109
A5	100	100	90	55,7	94,4	100	0,777899
A7	100	96,4	85	61,7	97,2	91,7	0,759239
A2	100	96,4	80	71,3	97,2	91,7	0,744746
A6	95,8	96,4	95	58,9	91,2	100	0,72029
A1	87,5	96,4	95	75	85,9	100	0,716848
A9	100	89,3	85	62,5	97,2	91,7	0,709964
A10	100	92,9	90	53,3	94,4	100	0,696739
A8	100	89,3	100	50	97,2	100	0,67337
A13	87,5	92,9	85	61,3	94,4	100	0,635688
A14	91,7	96,4	80	55,1	94,4	100	0,60163
A12	87,5	89,3	70	72,6	97,2	100	0,59058
A11	87,5	92,9	80	67,3	91,7	100	0,583152
A15	91,7	92,9	85	52,7	91,7	100	0,562138
A16	91,7	89,3	70	65,2	91,7	100	0,522464
A18	91,7	85,7	85	53	94,4	83,3	0,512862
A17	91,7	89,3	80	50,3	94,4	100	0,465399
A20	83,3	89,3	80	58,8	85,6	100	0,418478
A19	91,7	96,4	80	46,7	91,7	100	0,415036
A21	91,7	92,9	85	42,9	91,7	100	0,391848
A22	87,5	100	95	46,7	76,6	83,3	0,374819
A23	91,7	92,9	85	39,3	91,7	100	0,359239
A24	91,7	83,9	85	43	90	100	0,311957
A27	79,2	83,9	65	54,2	81,5	91,7	0,21721
A25	87,5	80,4	80	41,7	95,1	91,7	0,208333
A30	66,7	85,7	80	51,5	72,2	83,3	0,132609
A26	87,5	85,7	70	42,3	85,9	100	0,126812
A28	87,5	80,4	65	48,2	81,5	83,3	0,102355
A29	83,3	75	75	47,3	83,1	75	0,074094
A34	62,5	82,1	85	48,5	63,7	66,7	0,036957
A36	70,8	66,1	60	52,4	80,3	66,7	-0,00598
A35	66,7	75	60	47,3	81,7	91,7	-0,00906
A32	70,8	82,1	80	39	80,3	75	-0,01866
A31	70,8	85,7	75	35,1	89,1	83,3	-0,02083
A41	66,7	46,4	45	65,8	82,4	75	-0,04094
A33	62,5	75	80	46,1	75	75	-0,04783
A38	66,7	82,1	90	27,7	65,3	66,7	-0,12373
A37	62,5	76,8	80	36,6	67,8	91,7	-0,13696
A42	66,7	71,4	55	44	77,5	83,3	-0,14855
A40	58,3	69,6	50	44,9	90,5	83,3	-0,17174
A39	62,5	76,8	80	42,9	61,1	66,7	-0,17283
A46	58,3	58,9	55	58,6	55,6	75	-0,19529
A43	66,7	66,1	80	34,7	74,3	66,7	-0,22572
A50	62,5	64,3	35	50,6	75,2	66,7	-0,22681
A54	41,7	60,7	30	52,1	76,6	75	-0,28043
A45	75	57,1	60	36	73,1	75	-0,28696
A47	62,5	75	85	21	62	66,7	-0,29275
A52	54,2	51,8	60	52,1	56,3	66,7	-0,29891
A48	58,3	64,3	60	46,1	63,2	66,7	-0,3
A51	50	67,9	55	47,5	68,8	58,3	-0,30036
A44	75	50	70	33,3	73,4	83,3	-0,30707
A49	62,5	69,6	50	36,3	64,4	100	-0,34167
A53	45,8	60,7	65	43,8	60,9	58,3	-0,38732
A61	62,5	33,9	50	53,6	35,9	50	-0,43732
A55	45,8	53,6	55	48,2	54,9	58,3	-0,4471
A56	45,8	57,1	50	42,3	59,3	66,7	-0,53188
A65	45,8	51,8	20	48,5	38,7	66,7	-0,57391
A57	54,2	51,8	55	38,4	53,7	58,3	-0,58949
A59	50	55,4	55	36,5	54,2	41,7	-0,59583
A58	58,3	51,8	50	26,8	55,3	75	-0,64239
A62	45,8	42,9	40	33,9	69,9	66,7	-0,65471
A60	50	48,2	55	35,1	49,5	66,7	-0,66051
A63	33,3	55,4	60	23,2	59,7	41,7	-0,66395
A64	37,5	53,6	60	24,1	49,3	58,3	-0,71377
A67	45,8	53,6	25	30,1	54,2	50	-0,77464
A66	41,7	37,5	50	22,6	59,7	50	-0,78641
A68	29,2	26,8	50	35,7	43,3	41,7	-0,8192
A70	20,8	35,7	30	17,3	53	66,7	-0,89946
A69	33,3	48,2	25	22,3	52,3	33,3	-0,91105

(a) Netflow-Angle

	Crit6	Crit1	Crit3	Crit2	Crit5	Crit4	NetFlows
A4	63,7	85	97,2	100	96,4	100	0,804167
A3	64	90	93,5	100	96,4	100	0,795109
A5	55,7	90	94,4	100	100	100	0,777899
A7	61,7	85	97,2	100	96,4	91,7	0,759239
A2	71,3	80	97,2	100	96,4	91,7	0,744746
A6	58,9	95	91,2	95,8	96,4	100	0,72029
A1	75	95	85,9	87,5	96,4	100	0,716848
A9	62,5	85	97,2	100	89,3	91,7	0,709964
A10	53,3	90	94,4	100	92,9	100	0,696739
A8	50	100	97,2	100	89,3	100	0,67337
A13	61,3	85	94,4	87,5	92,9	100	0,635688
A14	55,1	80	94,4	91,7	96,4	100	0,60163
A12	72,6	70	97,2	87,5	89,3	100	0,59058
A11	67,3	80	91,7	87,5	92,9	100	0,583152
A15	52,7	85	91,7	91,7	92,9	100	0,562138
A16	65,2	70	91,7	91,7	89,3	100	0,522464
A18	53	85	94,4	91,7	85,7	83,3	0,512862
A17	50,3	80	94,4	91,7	89,3	100	0,465399
A20	58,8	80	85,6	83,3	89,3	100	0,418478
A19	46,7	80	91,7	91,7	96,4	100	0,415036
A21	42,9	85	91,7	91,7	92,9	100	0,391848
A22	46,7	95	76,6	87,5	100	83,3	0,374819
A23	39,3	85	91,7	91,7	92,9	100	0,359239
A24	43	85	90	91,7	83,9	100	0,311957
A27	54,2	65	81,5	79,2	83,9	91,7	0,21721
A25	41,7	80	95,1	87,5	80,4	91,7	0,208333
A30	51,5	80	72,2	66,7	85,7	83,3	0,132609
A26	42,3	70	85,9	87,5	85,7	100	0,126812
A28	48,2	65	81,5	87,5	80,4	83,3	0,102355
A29	47,3	75	83,1	83,3	75	75	0,074094
A34	48,5	85	63,7	62,5	82,1	66,7	0,036957
A36	52,4	60	80,3	70,8	66,1	66,7	-0,00598
A35	47,3	60	81,7	66,7	75	91,7	-0,00906
A32	39	80	80,3	70,8	82,1	75	-0,01866
A31	35,1	75	89,1	70,8	85,7	83,3	-0,02083
A41	65,8	45	82,4	66,7	46,4	75	-0,04094
A33	46,1	80	75	62,5	75	75	-0,04783
A38	27,7	90	65,3	66,7	82,1	66,7	-0,12373
A37	36,6	80	67,8	62,5	76,8	91,7	-0,13696
A42	44	55	77,5	66,7	71,4	83,3	-0,14855
A40	44,9	50	90,5	58,3	69,6	83,3	-0,17174
A39	42,9	80	61,1	62,5	76,8	66,7	-0,17283
A46	58,6	55	55,6	58,3	58,9	75	-0,19529
A43	34,7	80	74,3	66,7	66,1	66,7	-0,22572
A50	50,6	35	75,2	62,5	64,3	66,7	-0,22681
A54	52,1	30	76,6	41,7	60,7	75	-0,28043
A45	36	60	73,1	75	57,1	75	-0,28696
A47	21	85	62	62,5	75	66,7	-0,29275
A52	52,1	60	56,3	54,2	51,8	66,7	-0,29891
A48	46,1	60	63,2	58,3	64,3	66,7	-0,3
A51	47,5	55	68,8	50	67,9	58,3	-0,30036
A44	33,3	70	73,4	75	50	83,3	-0,30707
A49	36,3	50	64,4	62,5	69,6	100	-0,34167
A53	43,8	65	60,9	45,8	60,7	58,3	-0,38732
A61	53,6	50	35,9	62,5	33,9	50	-0,43732
A55	48,2	55	54,9	45,8	53,6	58,3	-0,4471
A56	42,3	50	59,3	45,8	57,1	66,7	-0,53188
A65	48,5	20	38,7	45,8	51,8	66,7	-0,57391
A57	38,4	55	53,7	54,2	51,8	58,3	-0,58949
A59	36,5	55	54,2	50	55,4	41,7	-0,59583
A58	26,8	50	55,3	58,3	51,8	75	-0,64239
A62	33,9	40	69,9	45,8	42,9	66,7	-0,65471
A60	35,1	55	49,5	50	48,2	66,7	-0,66051
A63	23,2	60	59,7	33,3	55,4	41,7	-0,66395
A64	24,1	60	49,3	37,5	53,6	58,3	-0,71377
A67	30,1	25	54,2	45,8	53,6	50	-0,77464
A66	22,6	50	59,7	41,7	37,5	50	-0,78641
A68	35,7	50	43,3	29,2	26,8	41,7	-0,8192
A70	17,3	30	53	20,8	35,7	66,7	-0,89946
A69	22,3	25	52,3	33,3	48,2	33,3	-0,91105

(b) Netflow-Weight

Best cities ranking

Best cities ranking representations

	Crit2	Crit5	Crit1	Crit6	Crit3	Crit4	NetFlows
A6	95,8	96,4	95	58,9	91,2	100	0,72029
A15	91,7	92,9	85	52,7	91,7	100	0,562138
A5	100	100	90	55,7	94,4	100	0,777899
A10	100	92,9	90	53,3	94,4	100	0,696739
A8	100	89,3	100	50	97,2	100	0,67337
A19	91,7	96,4	80	46,7	91,7	100	0,415036
A26	87,5	85,7	70	42,3	85,9	100	0,126812
A21	91,7	92,9	85	42,9	91,7	100	0,391848
A24	91,7	83,9	85	43	90	100	0,311957
A25	87,5	80,4	80	41,7	95,1	91,7	0,208333
A23	91,7	92,9	85	39,3	91,7	100	0,359239
A22	87,5	100	95	46,7	76,6	83,3	0,374819
A31	70,8	85,7	75	35,1	89,1	83,3	-0,02083
A32	70,8	82,1	80	39	80,3	75	-0,01866
A38	66,7	82,1	90	27,7	65,3	66,7	-0,12373
A37	62,5	76,8	80	36,6	67,8	91,7	-0,13696
A34	62,5	82,1	85	48,5	63,7	66,7	0,036957
A47	62,5	75	85	21	62	66,7	-0,29275
A43	66,7	66,1	80	34,7	74,3	66,7	-0,22572
A33	62,5	75	80	46,1	75	75	-0,04783
A44	75	50	70	33,3	73,4	83,3	-0,30707
A39	62,5	76,8	80	42,9	61,1	66,7	-0,17283
A45	75	57,1	60	36	73,1	75	-0,28696
A63	33,3	55,4	60	23,2	59,7	41,7	-0,66395
A64	37,5	53,6	60	24,1	49,3	58,3	-0,71377
A58	58,3	51,8	50	26,8	55,3	75	-0,64239
A66	41,7	37,5	50	22,6	59,7	50	-0,78641
A49	62,5	69,6	50	36,3	64,4	100	-0,34167
A60	50	48,2	55	35,1	49,5	66,7	-0,66051
A70	20,8	35,7	30	17,3	53	66,7	-0,89946
A69	33,3	48,2	25	22,3	52,3	33,3	-0,91105
A59	50	55,4	55	36,5	54,2	41,7	-0,59583
A67	45,8	53,6	25	30,1	54,2	50	-0,77464
A57	54,2	51,8	55	38,4	53,7	58,3	-0,58949
A53	45,8	60,7	65	43,8	60,9	58,3	-0,38732
A68	29,2	26,8	50	35,7	43,3	41,7	-0,8192
A62	45,8	42,9	40	33,9	69,9	66,7	-0,65471
A56	45,8	57,1	50	42,3	59,3	66,7	-0,53188
A48	58,3	64,3	60	46,1	63,2	66,7	-0,3
A55	45,8	53,6	55	48,2	54,9	58,3	-0,4471
A51	50	67,9	55	47,5	68,8	58,3	-0,30036
A65	45,8	51,8	20	48,5	38,7	66,7	-0,57391
A42	66,7	71,4	55	44	77,5	83,3	-0,14855
A52	54,2	51,8	60	52,1	56,3	66,7	-0,29891
A61	62,5	33,9	50	53,6	35,9	50	-0,43732
A40	58,3	69,6	50	44,9	90,5	83,3	-0,17174
A50	62,5	64,3	35	50,6	75,2	66,7	-0,22681
A54	41,7	60,7	30	52,1	76,6	75	-0,28043
A46	58,3	58,9	55	58,6	55,6	75	-0,19529
A36	70,8	66,1	60	52,4	80,3	66,7	-0,00598
A41	66,7	46,4	45	65,8	82,4	75	-0,04094
A35	66,7	75	60	47,3	81,7	91,7	-0,00906
A27	79,2	83,9	65	54,2	81,5	91,7	0,21721
A12	87,5	89,3	70	72,6	97,2	100	0,59058
A16	91,7	89,3	70	65,2	91,7	100	0,522464
A28	87,5	80,4	65	48,2	81,5	83,3	0,102355
A11	87,5	92,9	80	67,3	91,7	100	0,583152
A20	83,3	89,3	80	58,8	85,6	100	0,418478
A2	100	96,4	80	71,3	97,2	91,7	0,744746
A30	66,7	85,7	80	51,5	72,2	83,3	0,132609
A9	100	89,3	85	62,5	97,2	91,7	0,709964
A14	91,7	96,4	80	55,1	94,4	100	0,60163
A13	87,5	92,9	85	61,3	94,4	100	0,635688
A1	87,5	96,4	95	75	85,9	100	0,716848
A4	100	96,4	85	63,7	97,2	100	0,804167
A7	100	96,4	85	61,7	97,2	91,7	0,759239
A3	100	96,4	90	64	93,5	100	0,795109
A29	83,3	75	75	47,3	83,1	75	0,074094
A18	91,7	85,7	85	53	94,4	83,3	0,512862
A17	91,7	89,3	80	50,3	94,4	100	0,465399

(c) Angle-Angle

	Crit4	Crit3	Crit2	Crit5	Crit6	Crit1	NetFlows
A17	100	94,4	91,7	89,3	50,3	80	0,465399
A18	83,3	94,4	91,7	85,7	53	85	0,512862
A29	75	83,1	83,3	75	47,3	75	0,074094
A3	100	93,5	100	96,4	64	90	0,795109
A7	91,7	97,2	100	96,4	61,7	85	0,759239
A4	100	97,2	100	96,4	63,7	85	0,804167
A1	100	85,9	87,5	96,4	75	95	0,716848
A13	100	94,4	87,5	92,9	61,3	85	0,635688
A14	100	94,4	91,7	96,4	55,1	80	0,60163
A9	91,7	97,2	100	89,3	62,5	85	0,709964
A30	83,3	72,2	66,7	85,7	51,5	80	0,132609
A2	91,7	97,2	100	96,4	71,3	80	0,744746
A20	100	85,6	83,3	89,3	58,8	80	0,418478
A11	100	91,7	87,5	92,9	67,3	80	0,583152
A28	83,3	81,5	87,5	80,4	48,2	65	0,102355
A16	100	91,7	91,7	89,3	65,2	70	0,522464
A6	100	91,2	95,8	96,4	58,9	95	0,72029
A15	100	91,7	91,7	92,9	52,7	85	0,562138
A5	100	94,4	100	100	55,7	90	0,777899
A10	100	94,4	100	92,9	53,3	90	0,696739
A12	100	97,2	87,5	89,3	72,6	70	0,59058
A8	100	97,2	100	89,3	50	100	0,67337
A19	100	91,7	91,7	96,4	46,7	80	0,415036
A27	91,7	81,5	79,2	83,9	54,2	65	0,21721
A26	100	85,9	87,5	85,7	42,3	70	0,126812
A21	100	91,7	91,7	92,9	42,9	85	0,391848
A24	100	90	91,7	83,9	43	85	0,311957
A25	91,7	95,1	87,5	80,4	41,7	80	0,208333
A23	100	91,7	91,7	92,9	39,3	85	0,359239
A22	83,3	76,6	87,5	100	46,7	95	0,374819
A35	91,7	81,7	66,7	75	47,3	60	-0,00906
A31	83,3	89,1	70,8	85,7	35,1	75	-0,02083
A41	75	82,4	66,7	46,4	65,8	45	-0,04094
A32	75	80,3	70,8	82,1	39	80	-0,01866
A36	66,7	80,3	70,8	66,1	52,4	60	-0,00598
A38	66,7	65,3	66,7	82,1	27,7	90	-0,12373
A46	75	55,6	58,3	58,9	58,6	55	-0,19529
A37	91,7	67,8	62,5	76,8	36,6	80	-0,13696
A54	75	76,6	41,7	60,7	52,1	30	-0,28043
A50	66,7	75,2	62,5	64,3	50,6	35	-0,22681
A40	83,3	90,5	58,3	69,6	44,9	50	-0,17174
A34	66,7	63,7	62,5	82,1	48,5	85	0,036957
A47	66,7	62	62,5	75	21	85	-0,29275
A61	50	35,9	62,5	33,9	53,6	50	-0,43732
A43	66,7	74,3	66,7	66,1	34,7	80	-0,22572
A52	66,7	56,3	54,2	51,8	52,1	60	-0,29891
A42	83,3	77,5	66,7	71,4	44	55	-0,14855
A65	66,7	38,7	45,8	51,8	48,5	20	-0,57391
A33	75	75	62,5	75	46,1	80	-0,04783
A51	58,3	68,8	50	67,9	47,5	55	-0,30036
A55	58,3	54,9	45,8	53,6	48,2	55	-0,4471
A44	83,3	73,4	75	50	33,3	70	-0,30707
A39	66,7	61,1	62,5	76,8	42,9	80	-0,17283
A48	66,7	63,2	58,3	64,3	46,1	60	-0,3
A56	66,7	59,3	45,8	57,1	42,3	50	-0,53188
A45	75	73,1	75	57,1	36	60	-0,28696
A62	66,7	69,9	45,8	42,9	33,9	40	-0,65471
A68	41,7	43,3	29,2	26,8	35,7	50	-0,8192
A53	58,3	60,9	45,8	60,7	43,8	65	-0,38732
A57	58,3	53,7	54,2	51,8	38,4	55	-0,58949
A67	50	54,2	45,8	53,6	30,1	25	-0,77464
A59	41,7	54,2	50	55,4	36,5	55	-0,59583
A69	33,3	52,3	33,3	48,2	22,3	25	-0,91105
A70	66,7	53	20,8	35,7	17,3	30	-0,89946
A60	66,7	49,5	50	48,2	35,1	55	-0,66051
A49	100	64,4	62,5	69,6	36,3	50	-0,34167
A66	50	59,7	41,7	37,5	22,6	50	-0,78641
A63	41,7	59,7	33,3	55,4	23,2	60	-0,66395
A64	58,3	49,3	37,5	53,6	24,1	60	-0,71377
A58	75	55,3	58,3	51,8	26,8	50	-0,64239

(d) Proximity-Proximity

Best cities ranking (cont.)

Case study 2: Environmental Performance Index (EPI)

ENVIRONMENTAL HEALTH

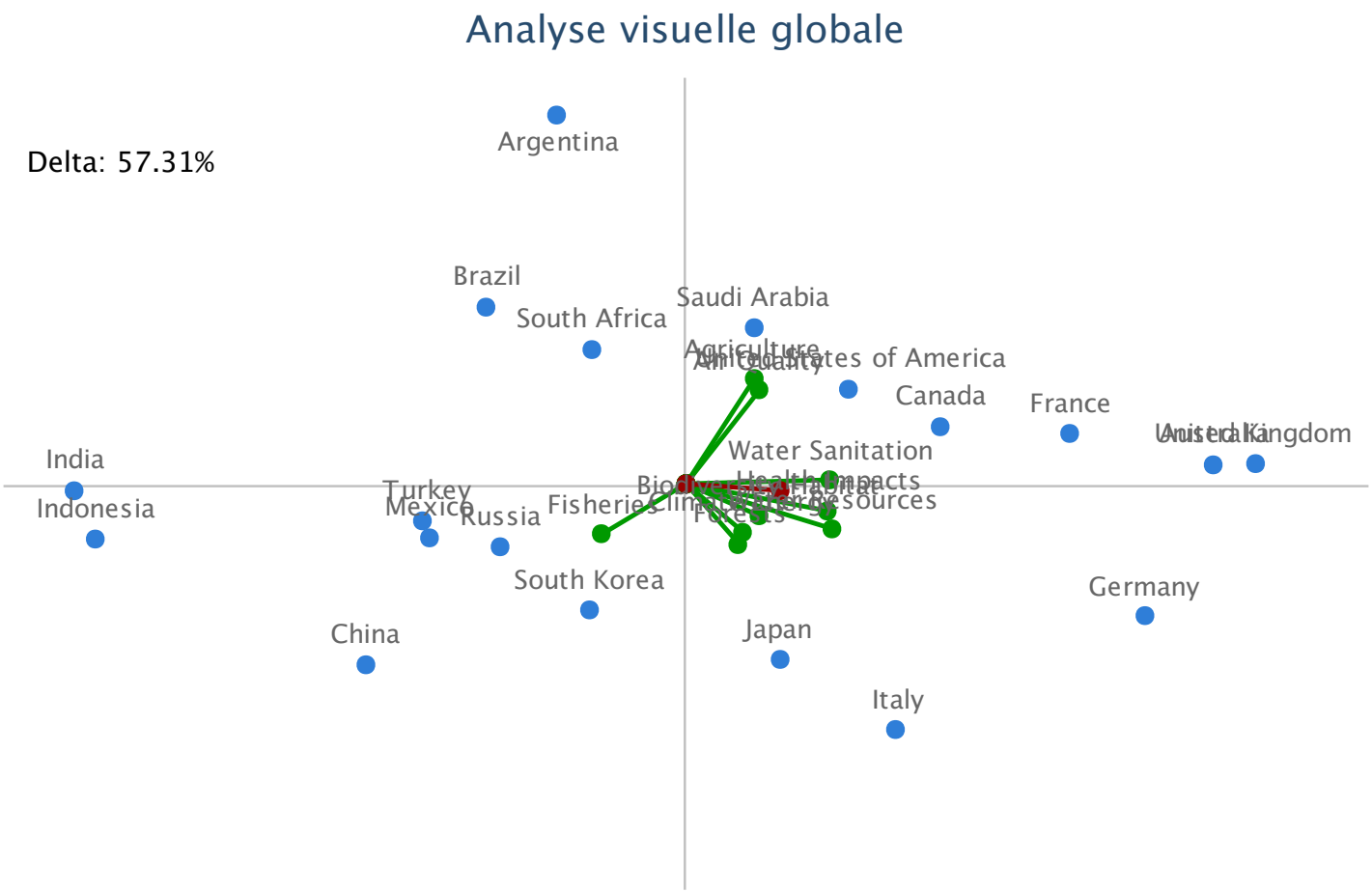
- Health Impacts
- Air Quality
- Water and Sanitation

ECOSYSTEM VITALITY

- Water Resources
- Agriculture
- Forests
- Fisheries
- Biodiversity and Habitat
- Climate and Energy

The 2014 EPI Framework includes 9 issues and 20 indicators. Access to Electricity is not included in the figure because it is not used to calculate country scores.

Case study 2: Environmental Performance Index (EPI)



GAIA plane for the EPI

EPI representations

	Crit3	Crit1	Crit4	Crit7	Crit8	Crit6	Crit5	Crit9	Crit2	NetFlows
A1	0,777778	0,888889	0,555556	0	0,944444	-0,22222	0,777778	0,777778	0,722222	0,625926
A3	0,777778	0,444444	0,444444	-0,94444	0,444444	0,333333	0,333333	1	0,722222	0,518519
A2	0,777778	-0,55556	0,222222	-0,33333	-0,11111	0,777778	1	0,888889	0,722222	0,474074
A5	0,444444	0,777778	0,111111	0,111111	-0,44444	0,555556	-0,33333	0,333333	0,722222	0,37963
A4	-0,22222	-0,44444	-0,11111	0,666667	0,722222	0,888889	0,666667	0,666667	0,722222	0,353703
A7	0,777778	0,111111	0,333333	-0,94444	0,333333	-0,11111	-0,44444	0,555556	0,722222	0,246297
A6	0,777778	-0,11111	-0,77778	0,833333	0,722222	-0,66667	0,444444	0,222222	0,333333	0,225
A8	0,333333	0,555556	0	-0,66667	-0,55556	0,444444	-0,11111	0,111111	0,111111	0,161111
A9	0,111111	-0,22222	0,888889	-0,55556	-0,94444	-0,33333	0,888889	-0,22222	0	-0,02963
A15	-0,33333	0,666667	0,666667	0,555556	-0,66667	0,222222	0,222222	-0,77778	-0,55556	-0,06759
A11	-0,44444	0	-0,44444	0,833333	-0,33333	0,111111	-0,22222	-0,11111	-0,33333	-0,14352
A14	-0,55556	0,222222	-1	-0,44444	0,166667	0,666667	-0,55556	-0,44444	-0,22222	-0,17315
A10	0,222222	-0,77778	-0,66667	0,333333	0	-0,77778	-0,66667	0,444444	0,222222	-0,18056
A16	0	1	1	-0,11111	-0,94444	-1	-0,77778	-0,66667	-0,11111	-0,18518
A13	-0,66667	0,333333	0,777778	-0,77778	0,944444	0	0	-0,33333	-1	-0,23611
A18	-0,77778	-1	-0,88889	-0,22222	-0,22222	1	0,111111	-0,55556	-0,44444	-0,34537
A12	-0,11111	-0,33333	-0,33333	0,222222	0,555556	-0,44444	-1	0	-0,77778	-0,3537
A17	-1	-0,66667	-0,55556	1	-0,77778	-0,55556	0,555556	-1	-0,66667	-0,51667
A19	-0,88889	-0,88889	-0,22222	0,444444	0,166667	-0,88889	-0,88889	-0,88889	-0,88889	-0,75278

(a) Netflow-Angle

	Crit1	Crit2	Crit3	Crit5	Crit6	Crit9	Crit7	Crit8	Crit4	NetFlows
A1	0,888889	0,722222	0,777778	0,777778	-0,22222	0,777778	0	0,944444	0,555556	0,625926
A3	0,444444	0,722222	0,777778	0,333333	0,333333	1	-0,94444	0,444444	0,444444	0,518519
A2	-0,55556	0,722222	0,777778	1	0,777778	0,888889	-0,33333	-0,11111	0,222222	0,474074
A5	0,777778	0,722222	0,444444	-0,33333	0,555556	0,333333	0,111111	-0,44444	0,111111	0,37963
A4	-0,44444	0,722222	-0,22222	0,666667	0,888889	0,666667	0,666667	0,722222	-0,11111	0,353703
A7	0,111111	0,722222	0,777778	-0,44444	-0,11111	0,555556	-0,94444	0,333333	0,333333	0,246297
A6	-0,11111	0,333333	0,777778	0,444444	-0,66667	0,222222	0,833333	0,722222	-0,77778	0,225
A8	0,555556	0,111111	0,333333	-0,11111	0,444444	0,111111	-0,66667	-0,55556	0	0,161111
A9	-0,22222	0	0,111111	0,888889	-0,33333	-0,22222	-0,55556	-0,94444	0,888889	-0,02963
A15	0,666667	-0,55556	-0,33333	0,222222	0,222222	-0,77778	0,555556	-0,66667	0,666667	-0,06759
A11	0	-0,33333	-0,44444	-0,22222	0,111111	-0,11111	0,833333	-0,33333	-0,44444	-0,14352
A14	0,222222	-0,22222	-0,55556	-0,55556	0,666667	-0,44444	-0,44444	0,166667	-1	-0,17315
A10	-0,77778	0,222222	0,222222	-0,66667	-0,77778	0,444444	0,333333	0	-0,66667	-0,18056
A16	1	-0,11111	0	-0,77778	-1	-0,66667	-0,11111	-0,94444	1	-0,18518
A13	0,333333	-1	-0,66667	0	0	-0,33333	-0,77778	0,944444	0,777778	-0,23611
A18	-1	-0,44444	-0,77778	0,111111	1	-0,55556	-0,22222	-0,22222	-0,88889	-0,34537
A12	-0,33333	-0,77778	-0,11111	-1	-0,44444	0	0,222222	0,555556	-0,33333	-0,3537
A17	-0,66667	-0,66667	-1	0,555556	-0,55556	-1	1	-0,77778	-0,55556	-0,51667
A19	-0,88889	-0,88889	-0,88889	-0,88889	-0,88889	-0,88889	0,444444	0,166667	-0,22222	-0,75278

(b) Netflow-Weight

EPI representations

	Crit3	Crit1	Crit4	Crit7	Crit8	Crit6	Crit5	Crit9	Crit2	NetFlows
A3	0,777778	0,444444	0,444444	-0,94444	0,444444	0,333333	0,333333	1	0,722222	0,518519
A1	0,777778	0,888889	0,555556	0	0,944444	-0,22222	0,777778	0,777778	0,722222	0,625926
A7	0,777778	0,111111	0,333333	-0,94444	0,333333	-0,11111	-0,44444	0,555556	0,722222	0,246297
A5	0,444444	0,777778	0,111111	0,111111	-0,44444	0,555556	-0,33333	0,333333	0,722222	0,37963
A8	0,333333	0,555556	0	-0,66667	-0,55556	0,444444	-0,11111	0,111111	0,111111	0,161111
A9	0,111111	-0,22222	0,888889	-0,55556	-0,94444	-0,33333	0,888889	-0,22222	0	-0,02963
A16	0	1	1	-0,11111	-0,94444	-1	-0,77778	-0,66667	-0,11111	-0,18518
A13	-0,66667	0,333333	0,777778	-0,77778	0,944444	0	0	-0,33333	-1	-0,23611
A15	-0,33333	0,666667	0,666667	0,555556	-0,66667	0,222222	0,222222	-0,77778	-0,55556	-0,06759
A19	-0,88889	-0,88889	-0,22222	0,444444	0,166667	-0,88889	-0,88889	-0,88889	-0,88889	-0,75278
A17	-1	-0,66667	-0,55556	1	-0,77778	-0,55556	0,555556	-1	-0,66667	-0,51667
A12	-0,11111	-0,33333	-0,33333	0,222222	0,555556	-0,44444	-1	0	-0,77778	-0,3537
A11	-0,44444	0	-0,44444	0,833333	-0,33333	0,111111	-0,22222	-0,11111	-0,33333	-0,14352
A14	-0,55556	0,222222	-1	-0,44444	0,166667	0,666667	-0,55556	-0,44444	-0,22222	-0,17315
A18	-0,77778	-1	-0,88889	-0,22222	-0,22222	1	0,111111	-0,55556	-0,44444	-0,34537
A10	0,222222	-0,77778	-0,66667	0,333333	0	-0,77778	-0,66667	0,444444	0,222222	-0,18056
A6	0,777778	-0,11111	-0,77778	0,833333	0,722222	-0,66667	0,444444	0,222222	0,333333	0,225
A4	-0,22222	-0,44444	-0,11111	0,666667	0,722222	0,888889	0,666667	0,666667	0,722222	0,353703
A2	0,777778	-0,55556	0,222222	-0,33333	-0,11111	0,777778	1	0,888889	0,722222	0,474074

(c) Angle-Angle

	Crit3	Crit2	Crit9	Crit5	Crit6	Crit8	Crit1	Crit4	Crit7	NetFlows
A3	0,777778	0,722222	1	0,333333	0,333333	0,444444	0,444444	0,444444	-0,94444	0,518519
A1	0,777778	0,722222	0,777778	0,777778	-0,22222	0,944444	0,888889	0,555556	0	0,625926
A2	0,777778	0,722222	0,888889	1	0,777778	-0,11111	-0,55556	0,222222	-0,33333	0,474074
A7	0,777778	0,722222	0,555556	-0,44444	-0,11111	0,333333	0,111111	0,333333	-0,94444	0,246297
A5	0,444444	0,722222	0,333333	-0,33333	0,555556	-0,44444	0,777778	0,111111	0,111111	0,37963
A8	0,333333	0,111111	0,111111	-0,11111	0,444444	-0,55556	0,555556	0	-0,66667	0,161111
A4	-0,22222	0,722222	0,666667	0,666667	0,888889	0,722222	-0,44444	-0,11111	0,666667	0,353703
A6	0,777778	0,333333	0,222222	0,444444	-0,66667	0,722222	-0,11111	-0,77778	0,833333	0,225
A9	0,111111	0	-0,22222	0,888889	-0,33333	-0,94444	-0,22222	0,888889	-0,55556	-0,02963
A10	0,222222	0,222222	0,444444	-0,66667	-0,77778	0	-0,77778	-0,66667	0,333333	-0,18056
A16	0	-0,11111	-0,66667	-0,77778	-1	-0,94444	1	1	-0,11111	-0,18518
A13	-0,66667	-1	-0,33333	0	0	0,944444	0,333333	0,777778	-0,77778	-0,23611
A18	-0,77778	-0,44444	-0,55556	0,111111	1	-0,22222	-1	-0,88889	-0,22222	-0,34537
A15	-0,33333	-0,55556	-0,77778	0,222222	0,222222	-0,66667	0,666667	0,666667	0,555556	-0,06759
A14	-0,55556	-0,22222	-0,44444	-0,55556	0,666667	0,166667	0,222222	-1	-0,44444	-0,17315
A11	-0,44444	-0,33333	-0,11111	-0,22222	0,111111	-0,33333	0	-0,44444	0,833333	-0,14352
A12	-0,11111	-0,77778	0	-1	-0,44444	0,555556	-0,33333	-0,33333	0,222222	-0,3537
A17	-1	-0,66667	-1	0,555556	-0,55556	-0,77778	-0,66667	-0,55556	1	-0,51667
A19	-0,88889	-0,88889	-0,88889	-0,88889	-0,88889	0,166667	-0,88889	-0,22222	0,444444	-0,75278

(d) Proximity-Proximity

Comparing the representation with the ratio R
Multicriteria-enriched tables can still hold ordinal properties

	Best cities ranking subset				Best cities ranking				Environmental Performance Index			
	Evaluations		Unicriterion Flows		Evaluations		Unicriterion Flows		Evaluations		Unicriterion flows	
	Nabla	R	Nabla	R	Nabla	R	Nabla	R	Nabla	R	Nabla	R
GA Best	648	100,00%	603	100,00%	13535	100,00%	13289	100,00%	1619	100,00%	1465	100,00%
GA Worst	149	0,00%	205	0,00%	2962	0,00%	3199	0,00%	643	0,00%	838	0,00%
Netflow-Angle	625	95,39%	589	96,48%	13149	96,35%	13209	99,21%	1392	76,74%	1430	94,42%
Netflow-Weight	533	76,95%	597	98,49%	12959	94,55%	13186	98,98%	1556	93,55%	1439	95,85%
Angle-Angle	424	55,11%	388	45,98%	7662	44,45%	7722	44,83%	1176	54,61%	1214	59,97%
Proxi-Proxi	611	92,59%	567	90,95%	12695	92,06%	12475	91,93%	1503	88,11%	1417	92,34%

Conclusion

- Multicriteria-enriched evaluation table can give an interesting insights into a problem
- Development of the ∇-indicator and the ratio R to evaluate and compare the representations
- The PROMETHEE-based tables still hold good ordinal properties while giving multicriteria information